AF-3044

B.A. / B.Sc. (Part - II)
Term End Examination, 2017-18

MATHEMATICS

Paper - II

Differential Equations

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : **सभी** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer **all** questions. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ को घात श्रेणी विधि से हल कीजिए।

Solve by power series method $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$.

(b) बेसल समीकरण $x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+xy=0$ को हल कीजिए।

Solve the Bessel's equation $x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+xy=0$.

अथवा / OR

(a) सिद्ध कीजिए कि

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \ n = 1, 2, 3, ... ।$$

Prove that

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \ n = 1, 2, 3, ...$$

(b) सिद्ध कीजिए कि :

(i) $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)}\cos x$

(ii) $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)}\sin x$

Prove that :

(i) $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)}\cos x$

(ii) $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)}\sin x$

इकाई / Unit-II

2. (a) ज्ञात कीजिए :

(i) $L\{\sin at\}$

(ii) $L\{\cos at\}$

Find the value :

(i) $L\{\sin at\}$

(ii) $L\{\cos at\}$

(b) (i) फलन $F(t)=\dfrac{e^{at}-1}{a}$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए।

Find the Laplace transform of the function $F(t)=\dfrac{e^{at}-1}{a}$.

(ii) ज्ञात कीजिए :

$L(e^{at})$

Find the value :

$L(e^{at})$

अथवा / OR

(a) दर्शाइए कि $\int_0^\infty (\sin x^2)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ लाप्लास रूपान्तरण का उपयोग करके।

Using Laplace transform to show that

$$\int_0^\infty (\sin x^2)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(*b*) संवलन प्रमेय के उपयोग से

$L^{-1}\left\{\dfrac{p}{\left(p^2+a^2\right)^2}\right\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

By using convolution theorem, find the value of $L^{-1}\left\{\dfrac{p}{\left(p^2+a^2\right)^2}\right\}$.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) यदि $z = f(x + ay) + \phi(x - ay)$, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ।

If $z = f(x + ay) + \phi(x - ay)$, then prove that $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

(*b*) निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Solve the following equation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

अथवा / OR

(*a*) पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए :

$$z(p^2 - q^2) = x - y$$

Find the complete integral of :

$$z(p^2 - q^2) = x - y.$$

(*b*) निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

$$x^2p^2 + y^2q^2 = z^2$$

Solve the following equation :

$$x^2p^2 + y^2q^2 = z^2$$

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

$$(D^2 + 3DD' + 2D'^2)\, z = x + y$$

Solve the following equation :

$$(D^2 + 3DD' + 2D'^2)\, z = x + y$$

(*b*) हल कीजिए :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$$

Solve the equation :

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$$

अथवा / OR

(*a*) आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए

$$p + r + s = 1$$

Solve the partial differential equation

$$p + r + s = 1$$

(*b*) निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y$$

Solve the following equation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y$$

इकाई / Unit-V

5. (*a*) फलनक $I\left[y(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\left(1 + y'^2\right)^{1/2}}{x} dx$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Find the extremal of the following functional

$$I\left[y(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\left(1 + y'^2\right)^{1/2}}{x} dx \, .$$

(*b*) दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 = 36$ तथा बिन्दु $A(1, 0)$ के मध्य लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ and the point $A(1, 0)$.

अथवा / OR

(*a*) वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ तथा सरलरेखा $x + y = 4$ के मध्य लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the circle $x^2 + y^2 = 1$ and the straight line $x + y = 4$.

(*b*) फलनक $I[y(x)] = \int_0^2 \left(e^{y'} + 3 \right) dx$, $y(0) = 0$ एवं $y(x) = 1$ के चरम के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the extremal for the functional $I[y(x)] = \int_0^2 \left(e^{y'} + 3 \right) dx$, $y(0) = 0$ and $y(x) = 1$.