AF-3043

B.A. / B.Sc. (Part - II)
Term End Examination, 2017-18

MATHEMATICS

Paper - I

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : **सभी** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer **all** questions. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होती है।

Prove that every cauchy sequence is bounded.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी निरपेक्षतः अभिसारी है :

$$1-\frac{1}{22}+\frac{1}{32}-\frac{1}{42}+\ldots\ldots$$

Prove that the following series is absolutely convergent :

$$1-\frac{1}{22}+\frac{1}{32}-\frac{1}{42}+\ldots\ldots$$

अथवा / OR

(*a*) निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\ldots\ldots$$

Test the convergent of the following series :

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\ldots\ldots$$

(*b*) निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{3}+\frac{1\cdot2}{2\cdot4}\cdot\frac{x^3}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^4}{7}+\ldots\infty,\ x>0$$

Test the convergence of the following series :

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{3}+\frac{1\cdot2}{2\cdot4}\cdot\frac{x^3}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^4}{7}+\ldots\infty,\ x>0$$

इकाई / Unit-II

2. (*a*) अवकलन का शृंखला नियम लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove chain rule of differentiation.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^2$, R में एकसमान संतत नहीं है।

Prove that $f(x) = x^2$, is not uniformly continuous in R.

अथवा / OR

(*a*) मोस्टेस्ट का प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Mostest Theorem.

(*b*) प्रथम मध्यमान प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि यदि $x > 0$, तो $\log_{10}(1+x) = \frac{x \log_{10} e}{1+\theta x}$, जहाँ $0 < \theta < 1$।

By First mean value theorem prove that if $x > 0$, then $\log_{10}(1+x) = \frac{x \log_{10} e}{1+\theta x}$, $0 < \theta < 1$.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) $\in$-δ तकनीक का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\left(x^2+2y\right)=3$$

By using $\in$-δ technique prove that

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\left(x^2+2y\right)=3$$

(*b*) यदि $u=f(y-3,\ 3-x,\ x-y)$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

If $u=f(y-3,\ 3-x,\ x-y)$, then prove that

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

अथवा / OR

(*a*) यदि $x+y+z=u,\ y+z=uv,\ z=uvw$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=u^2v$$

If $x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uvw$, then prove that

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2 v$$

(*b*) यदि $u = \log (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{x + y + z}$$

If $u = \log (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then prove that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{x + y + z}$$

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) उन वृत्तों का एन्वलप ज्ञात कीजिए जिनके व्यास $y^2 = 4ax$ की ध्रुवांतर रेखाएँ हैं।

Find the envelope of circles whose diameter is radii vector of $y^2 = 4ax$.

(*b*) फलन $U = \sin x \sin y \sin (x + y)$ का उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ट ज्ञात कीजिए।

Find maximum amd minimum of function $U = \sin x \sin y \sin (x + y)$.

अथवा / OR

(*a*) वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

Find evolute of curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

(*b*) यदि $x + y + z = a$ हो, तो $x^m y^n z^p$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Find maximum value of $x^m y^n z^p$ if $x + y + z = a$.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_a^b (x-a)^{m-1} (b-x)^{n-1} \, dx$$

$$= (b-a)^{m+n-1} B(m,n)$$

Prove that :

$$\int_a^b (x-a)^{m-1} (b-x)^{n-1} \, dx$$

$$= (b-a)^{m+n-1} B(m,n)$$

(*b*) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\log 2} \int_0^x \int_0^{x+\log y} e^{x+y+z} \, dxdydz$$

Evaluate :

$$\int_0^{\log 2} \int_0^{x} \int_0^{x+\log y} e^{x+y+z} dxdydz$$

अथवा / OR

(*a*) $\iiint_V x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx\, dy\, dz$ जहाँ V निर्देशांक्षी और समतल $x + y + z = 1$ से परिबद्ध संहत प्रदेश है।

Evaluate $\iiint_V x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx\, dy\, dz$ where V is closed region bounded by co-ordinates plane and plane $x + y + z = 1$.

(*b*) निम्न समाकलन के क्रम का परिवर्तन कीजिए

$$\int_0^{a\cos\alpha} \int_{x\tan\alpha}^{\sqrt{a^2-x^2}} V dxdy$$

Change order of following integration

$$\int_0^{a\cos\alpha} \int_{x\tan\alpha}^{\sqrt{a^2-x^2}} V dxdy$$

———