AF-3076

B.A / B.Sc. (Part - III)
Term End Examination, 2017-18

MATHEMATICS

Paper - II

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) मान लो G एक समूह है तथा मान लो g, G का एक स्थिर अवयव है। तब प्रतिचित्रण $Tg : G \to G$ जो $Tg(x) = gxg^{-1}$ $\forall x \in G$ से परिभाषित है, G का एक स्वकारिता है।

Let G be a group and let g be a fixed element of G. Then the mapping $Tg : G \to G$ defined by $Tg(x) = gxg^{-1}$ $\forall x \in G$ is an automorphism of G.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि समूह G का केन्द्र $Z(G)$ सदैव G का एक प्रसमान्य उपसमूह होता है।

Prove that the centre $Z(G)$ of a group G is alsways a normal subgroup of the group G.

(*c*) मान लो G कोटि 231 का एक समूह है। दर्शाइए कि G कें 11-सिलो उपसमूह G में केन्द्र में अंतर्विष्ट है।

Let G be a group of order 231. Show that 11-sylow subgroup of G is contained in the centre of G.

इकाई / Unit-II

2. (*a*) वलयों के समाकारिता पर मूल प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove the fundamental theorem on homomorphism of rings.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि यदि बहुपद $f(x)$ को $(x-a)$ से भाग दिया जाये तो शेषफल $f(x)$ होता है।

Prove that if the polynomial $f(x)$ is divided by $(x-a)$ the remainder is $f(a)$.

(*c*) सिद्ध कीजिए कि किसी वलय R की दो गुणजावलियों S और T के लिए, $S \cup T$, R की एक गुणजावली होती है यदि और केवल यदि या तो $S \subseteq T$ या $T \subseteq S$।

Prove that for two ideals S and T of any ring R, $S \cup T$ is an ideal of R if and only if either $S \subseteq T$ or $T \subseteq S$.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के एक अरिक्त उपसमुच्चय W के लिए V का एक उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध है :

(*i*) $\alpha \in W, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(*ii*) $a \in F, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$

Prove that the necessary and sufficient conditions for a non-empty subset W of a vector space $V(F)$ to be a subspace of $V(F)$ are :

(*i*) $\alpha \in W, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(*ii*) $a \in F, \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$

(*b*) दर्शाइये कि समुच्चय $S = \{(1, 1, 2), (3, -1, 0), (2, 0, -1)\}$, R^3 का एक आधार बनाते हैं एवं S के सापेक्ष $(2, -1, 6)$ का निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Show that the set $S = \{(1, 1, 2), (3, -1, 0), (2, 0, -1)\}$, forms a basis of R^3 and find the coordinates of the vector $(2, -1, 6)$ with respect to S.

(*c*) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित विमीय सदिश समष्टि के आधार का अस्तित्व होता है।

Prove that there exists a basis for each finite dimensional vector space.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $T : V_3(R) \to V_2(R)$ जो $T(a, b, c) = (c, a + b)$ से परिभाषित है, एक रैखिक रूपांतरण है।

Prove that the mapping $T : V_3(R) \to V_2(R)$ defined by $T(a, b, c) = (c, a + b)$ is a linear transformation.

(*b*) माना कि R^3 पर T एक रैखिक संकारक है, जो $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$ से परिभाषित है। आधार $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, जहाँ $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 1)$ हैं। सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए।

Let T be the linear operator on R^3 defined by $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$. What is the matrix of T in the ordered basis $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, where $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)$, $\alpha_3 = (1, 0, 1)$?

(*c*) मान लो

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

एक आव्यूह P इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, 3)$।

Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Find a matrix P such that $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, 3)$.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) किसी आन्तर गुणन समष्टि $V(F)$ में किन्हीं भी दो सदिशों α, β के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$|(\alpha,\beta)| \leq \|\alpha\| . \|\beta\|$$

In an inner product space $V(F)$, for any two vectors α, β prove that

$$|(\alpha,\beta)| \leq \|\alpha\| . \|\beta\|$$

(*b*) लाम्बिक आधार को परिभाषित कीजिए।

मान लो $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots. \alpha_m\}$ एक आंतर गुणन समष्टि V में शून्येत्तर सदिशों का एक लाम्बिक समुच्चय है। यदि कोई सदिश $\beta \in V$, S के रैखिक विस्तृति में हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\beta = \sum_{k=1}^{m} \frac{(\beta, \alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k$$

Define orthoginal basis.

Let $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots. \alpha_m\}$ be an orthogonal set of non zero vectors in an inner product space V. If a vector $\beta \in V$ is in the linear span of S, then prove that

$$\beta = \sum_{k=1}^{m} \frac{(\beta, \alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k$$

(*c*) ग्राम-श्मिट के लाम्बिक प्रक्रम का उपयोग करके $V_3(R)$ के आधार $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ से एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिए, जहाँ $\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 2, -2)$, $\beta_3 = (2, -1, 1)$ ।

Apply the Gram-Schmidt orthogonalization process to obtain an orthonormal basis for the basis $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ of $V_3(R)$ where $\beta_1 = (1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, 2, -2)$, $\beta_3 = (2, -1, 1)$.