AE-1211

B.Sc. (Part - I)
Term End Examination, 2016-17

MATHEMATICS

Paper - I

Algebra and Trigonometry

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : **All** questions are compulsory. Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) दर्शाइए कि प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स को $P + iQ$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ P तथा Q दोनों हर्मिटीय हैं।

Show that every square matrix can be expressed as $P + iQ$, where P and Q both are Hermitian.

(*b*) दर्शाइए कि R^3 का उपसमुच्चय {(3,4,–1), (1,2,0), (1,0,–1)} रैखिकत: परतंत्र है।

Show that the subset of R^3 {(3,4,–1), (1,2,0), (1,0,–1)} is linearly dependent.

(*c*) दर्शाइए कि किसी मैट्रिक्स के भिन्न-भिन्न आइगेन मानों के संगत आइगेन सदिश एकघातत: स्वतंत्र होते हैं।

Show that the eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues of a matrix are linearly independent.

इकाई / Unit-II

2. (*a*) λ तथा μ के किन मानों के लिए समीकरणों $x+y+z=6$, $x+2y+3z=10$, $x+2y+\lambda z=\mu$ का

(*i*) कोई हल नहीं है;

(*ii*) एक अद्वितीय हल है;

(*iii*) अनंत हल है ?

For what values of λ and μ the equations $x+y+z=6$, $x+2y+3z=10$, $x+2y+\lambda z=\mu$ have

(*i*) no solution;

(*ii*) an unique solution;

(*iii*) infinite solution ?

(*b*) यदि समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के मूल α, β, γ हो, तो समीकरण बनाइए जिनके मूल $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\alpha+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ हैं।

If α, β, γ are the roots of equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then construct equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\alpha+\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

(*c*) डेकार्ट विधि से चतुर्थघाती समीकरण $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$ को हल कीजिए।

Using Descartes' Method, solve the biquadratic equation $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) यदि R किसी समुच्चय A में तुल्यता संबंध है, तो दर्शाइए कि R^{-1} भी A में तुल्यता संबंध है।

If R is an equivalence relation in set A, then show that R^{-1} is also an equivalence relation in A.

(*b*) दर्शाइए कि धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q_+, संक्रिया * के सापेक्ष आबेली ग्रूप बनाता है, जहाँ $a*b=\frac{ab}{2} \forall a,b \in Q_+$.

Show that the set of all positive rational numbers Q_+, forms an abelian group with operation *, where $a*b=\frac{ab}{2} \forall a,b \in Q_+$.

(*c*) G एक समूह है, $H \subseteq G$ तब H, G का उपग्रूप होगा यदि और केवल यदि $a \in H,\ b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, जहाँ b^{-1}, b का प्रतिलोम है। सिद्ध कीजिए।

G is a group, $H \subseteq G$, then H is a subgroup of G if and only if $a \in H,\ b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, where b^{-1} is a inverse of b. Prove.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) दर्शाइए कि $a \to a^{-1}$, G में एक स्वकारिता होगी यदि और केवल यदि G आबेली है।

Show that $a \to a^{-1}$ is an automorphism of G if and only if G is abelian.

(*b*) यदि $f : \underset{(\text{वलय})}{R} \to \underset{(\text{वलय})}{R'}$ एक समाकारी प्रतिचित्रण है, तब दर्शाइए कि ker f एक आइडियल होगा।

If $f : \underset{(\text{ring})}{R} \to \underset{(\text{ring})}{R'}$ is a homomorphic mapping, then show that ker f will be an ideal.

(*c*) समिश्र संख्याओं का समुच्चय क्रमित पूर्णांकीय प्रांत नहीं होता। दर्शाइए।

Set of complex numbers is not an ordered integral domain. Show that.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) दर्शाइए कि

$$(a+ib)^{m/n} + (a-ib)^{m/n} = 2\left(a^2+b^2\right)^{m/2n} \cos\left(\frac{m}{n}\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

जहाँ m, n धनात्मक पूर्णांक हैं।

Show that

$$(a+ib)^{m/n}+(a-ib)^{m/n}=$$

$$2\left(a^2+b^2\right)^{m/2n}\cos\left(\frac{m}{n}\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

where m, n are positive integers.

(*b*) यदि $\sin(\theta + i\,\phi) = \rho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, तब दर्शाइए कि

(*i*) $\rho^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2\phi - \cosh 2\theta)$

(*ii*) $\tan\alpha = \tanh\phi \cdot \tanh\theta$

If $\sin(\theta+i\,\phi) = \rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, then show that

(*i*) $\rho^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2\phi - \cosh 2\theta)$

(*ii*) $\tan\alpha = \tanh\phi \cdot \tanh\theta$

(*c*) निम्न श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए :

$$c\cos\alpha - \frac{1}{2}c^2\cos 2\alpha + \frac{c^3}{3}\cos 3\alpha - ...\infty$$

Find the sum of the following series :

$$c\cos\alpha - \frac{1}{2}c^2\cos 2\alpha + \frac{c^3}{3}\cos 3\alpha - ...\infty$$

———